



I. عبارة - دالة عبارية - المكملات:

01. عبارة: PROPOSITION

A. تعريف:

كل نص رياضية يحمل معنى ويكون صحيحا وإما خاطئا (أحدهما فقط) يسمى عبارة ونرمز لها ب p أو q أو r . صحيحة وإما خاطئة فهو يمثل قيمة حقيقة العبارة. صحيحة نرمز لذلك ب: 1 أو V . خاطئة نرمز لذلك ب: 0 أو F .

B. مثال:

- من بين الكتابات الآتية. حدد العبارات ثم قيمة حقيقة كل عبارة :
- " 3 عدد فردي " . **جواب : عبارة V**
- " $8=3+6$ " **جواب : عبارة F**
- " n من $\mathbb{N}$. $n(n+1)$ يقبل القسمة على 3 " **جواب : ليست بعبارة**
- " $x \in \mathbb{R} / x+3=0$ " **جواب : ليست بعبارة**
- " مجموع عدد زوجي وعدد فردي هو عدد فردي " **جواب : ليست بعبارة**

C. جدول قيم حقيقة عبارة .

عبارة ما p قيمة حقيقتها V وإما F .

ونلخص ذلك بالجدول التالي. ويسمى جدول قيم حقيقة عبارة.

02. دالة عبارية: FORMES PROPOSITIONNELLES

A. تعريف:

كل نص رياضي يحتوي على متغير أو عدة متغيرات تنتمي إلى مجموعة E حيث يصبح عبارة كلما عوضنا المتغير بعنصر من E . يسمى دالة عبارية ونرمز للدالة العبارية ب: $A(x)$ أو $P(x)$, $A(x,y)$ أو $P(x,y)$,

B. مثال :

نعتبر الدالتين العبارتين التاليتين :

$$A(x,y) : " \text{ لكل } x \text{ و } y \text{ من } \mathbb{R} : x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 "$$

$$P(n) : " \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}^* : 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} "$$

03. المكملات: QUANTIFICATEURS

A. مفردات :

لتكن $A(x)$ دالة عبارية معرفة على مجموعة E .

☞ العبارة: " يوجد x من E حيث $A(x)$ " . نرمز لها ب: " $\exists x \in E / A(x)$ " . تقرأ يوجد على الأقل x من E تعني : يوجد

على الأقل عنصر x من E يحقق $A(x)$. الرمز $\exists$ يسمى المكمل الكوني.

☞ العبارة: " لكل x من E حيث $A(x)$ " . نرمز لها ب: " $\forall x \in E / A(x)$ " . تقرأ مهما كان x من E لدينا $A(x)$ تعني: أن

جميع عناصر x من E تحقق $A(x)$. الرمز $\forall$ يسمى المكمل الكوني.

B. ملاحظات :

- نفي المكمل $\forall$ هو المكمل $\exists$.
- نفي المكمل $\exists$ هو المكمل $\forall$.



- كل دالة عبارية تحتوي على عدة مكملات . تغير ترتيب المكملات
- أ- ليس له أهمية و لا يغير المعنى إذا كانت من نفس النوع.
- ب- له أهمية و يغير المعنى إذا لم تكن من نفس النوع.

توضيح لذلك :

مثال 1 : $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, y > x$ هي صحيحة (ليكن x من $\mathbb{Z}$ يوجد y من $\mathbb{Z}$ (يمكن أن نأخذ $y = x + 1$) حيث : $y > x$ ولكن العبارة : $\exists y \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{Z}, y > x$ غير صحيحة لأن العنصر y الذي يوجد سيكون لجميع عناصر x من $\mathbb{Z}$ وهذا غير ممكن للعنصر $x = y$.

مثال 2 :

نعتبر : $E = \{1, 3, 5\}$ و $F = \{2, 4, 6\}$.

العبارة $\forall x \in E, \exists y \in F, y = x + 1$. و هي تقرئ " لكل عنصر x من E ؛ يمكن أن نجد عنصر y من F حيث $y = x + 1$. ويمكن تحقق من ذلك بسهولة .

ولكن العبارة : $\exists y \in F, \forall x \in E, y = x + 1$. و هي تقرئ " يوجد عنصر y من F يحقق لكل عنصر x من E العلاقة $y = x + 1$ وهذا غير ممكن لأي قيمة تعطي ل y .

نكتب ما يلي: (نفس الشيء للرمز $\exists$)

- $\forall (x, y) \in E \times F$ أو $\forall x, y \in E$ ب $\forall x \in E, \forall y \in E$ -

- $\forall (x, y) \in E \times F$ أو $\forall x, y \in E$ ب $\forall x \in E, \forall x \in E$ -

- أما الكتابة : $\exists! x \in E$: يقرأ : يوجد عنصر وحيد x من E .

II. العمليات على العبارات : (الروابط المنطقية) connecteurs

01. نفي عبارة :

A. تعريف:

نفي عبارة p هي العبارة q حيث قيمة حقيقتها عكس قيمة حقيقة p ونرمز لها ب: $q = \neg p$ أو أيضا $q = \neg p$

B. جدول قيم حقيقة نفي عبارة :

p	$\neg p$
1	0
0	1

C. خاصية :

$\neg(\neg p) = p$ لدينا .

02. عطف عبارتين: (العطف المنطقي) conjonction

A. تعريف:

عطف عبارتين p و q هو العبارة r التي تكون صحيحة إذا و فقط إذا كانت: p و q صحيحتين في نفس الوقت . ونرمز لها ب: $p \wedge q$ أو أيضا : $r = p \wedge q$.

B. جدول قيم حقيقة $p \wedge q$:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

C. مثال :

" p عدد زوجي " q " 6 يقبل القسمة على 3 "

عطف العبارتين هو العبارة :



p و q " 2 عدد زوجي و 6 يقبل القسمة على 3 "

D. خاصية:

p و q و r ثلاث عبارات :

- العطف تبادلي : p و q = q و p .
- العطف تجمعي : (q و r) و p = r و (p و q) . لهذا يجوز كتابة كلتا العبارتين على الشكل الآتي : p و q و r

03. فصل عبارتين : (الفصل المنطقي) disjonction

A. تعريف :

فصل عبارتين p و q هو العبارة r التي تكون خاطئة فقط إذا كانت p و q خاطئتين في نفس الوقت.
ونرمز لها ب : p أو q أو r : أيضا : $r = p \vee q$.

B. تمرين :

(a) قارن $p \vee q$ ثم $\overline{p \wedge q}$.

C. خاصية :

p و q و r ثلاث عبارات:

- الفصل تبادلي : p أو q = q أو p
- الفصل تجمعي : (r أو q) أو p = r أو (p أو q) . لهذا يجوز كتابة كلتا العبارتين على الشكل الآتي : p أو q أو r .
- الفصل توزعي على العطف :
- توزيعية على اليمين : (r أو q) و (p أو r) = r أو (p و q)
- توزيعية على اليسار : (p أو r) و (p و q) = p أو (r و q)
- العطف توزعي على الفصل نعوض مكان (أو) ب (و) ثم مكان (و) ب أو .

D. قانوني مورغن - LOIS DE MORGAN

- نفي العطف : $\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$ (و = و) ؛ (و = و)
- نفي الفصل : $\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}$

04. استلزام عبارتين : implication

A. تعريف :

استلزام عبارتين p ثم q في هذا الترتيب هو العبارة التي يرمز لها ب : p أو $\overline{q}$ ، و تكون خاطئة فقط عندما تكون p صحيحة و q خاطئة . ونرمز لها كذلك ب : $p \Rightarrow q$.
نقرأ : p تستلزم q . أو أيضا : إذا كان p فإن q .

B. جدول قيم حقيقة استلزام عبارتين :

C. مفردات

نعتبر الاستلزام $p \Rightarrow q$.

- العبارة p تسمى معطيات الاستلزام.
- العبارة q تسمى نتيجة الاستلزام.
- الاستلزام $p \Rightarrow q$ يسمى الاستلزام المباشر .
- الاستلزام $q \Rightarrow p$ يسمى الاستلزام العكسي .

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1



الاستلزام $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ يسمى الاستلزام المضاد للعكس لـ $p \Rightarrow q$.

D. خاصية :

p و q و r ثلاث عبارات

الاستلزام متعدي: $(p \Rightarrow q) \text{ و } (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

نفي الاستلزام: $\bar{q} \text{ و } \bar{p} \Rightarrow \bar{q} = \bar{p} \Rightarrow \bar{q} = p \Rightarrow q$.

05. تكافؤ عبارتتين: équivalence

A. تعريف :

العبرة " $(p \Rightarrow q)$ و " $(q \Rightarrow p)$ " تسمى تكافؤ عبارتتين p و q هي صحيحة فقط عندما تكون لـ p و q نفس قيمة حقيقة معا.

و يرمز لها بـ: $p \Leftrightarrow q$.

و تقرأ: p تكافؤ q . أو أيضا: p تعني q . أو أيضا: p إذا و فقط إذا كان q .

B. جدول قيم حقيقة تكافؤ عبارتتين هو:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

C. خاصية :

p و q و r ثلاث عبارات

التكافؤ تبادلي: $(p \Leftrightarrow q) = (q \Leftrightarrow p)$

التكافؤ متعدي: $(p \Leftrightarrow q) \text{ و } (q \Leftrightarrow r) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$

III. القوانين المنطقية: lois logiques

A. تعريف :

كل عبارة مكونة من عدة عبارات مرتبطة فيما بينها بالروابط المنطقية و تكون صحيحة مهما كانت قيم حقيقة هذه العبارات المكونة لها ، فهي تسمى قانون منطقي.

B. أمثلة:

- قانوني موركان
- جميع الخاصيات التي سبق ذكرها في العمليات المنطقية.
- (مثال : التبادلية التجمعية – التعدي)

IV. أنواع الاستدلالات الرياضية: TYPES (OU MODES) DE RAISONNEMENT MATHEMATIQUE

01. الاستدلال بالمثال المضاد: PAR CONTRE EXEMPLE

A. تعريف :

لكي نبرهن على أن العبارة " $\forall x \in E, A(x)$ " خاطئة يكفي أن نبرهن أن نفيها " $\exists x \in E, \bar{A}(x)$ " عبارة صحيحة.

و هذا النوع من الاستدلال يسمى الاستدلال بالمثال المضاد.

B. مثال:

مثال 1: هل مجموع عددين اللاجذريين هو عدد اللاجذري؟



جواب: نعطي مثال مضاد:

لدينا : $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ عدنان اللاجذريان ولكن مجموعهما هو $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$ ليس بعدد اللاجذري بل هو عدد طبيعي.

خلاصة: مجموع عددين اللاجذريين ليس دائما بعدد اللاجذري.

02. الاستدلال باستعمال التكافؤات المتتالية: par équivalence successives:

A. خاصية:

p و p_1 و p_2 و p_3 و و p_k و q عبارات.
إذا كانت التكافؤات التالية $p \Leftrightarrow p_1$ ، $p_1 \Leftrightarrow p_2$ ، .. و $p_k \Leftrightarrow q$ كلها صحيحة فإن $p \Leftrightarrow q$ تكافؤا صحيحا.

B. مثال:

a و b من $\mathbb{R}$. بين: $a^2 + b^2 = 2ab \Leftrightarrow a = b$

جواب: لدينا: $a^2 + b^2 = 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab = 0$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a - b = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b$$

خلاصة: $a^2 + b^2 = 2ab \Leftrightarrow a = b$

03. الاستدلال الاستنتاجي: déductif:

A. خاصية:

إذا كان الاستلزام $p \Rightarrow q$ صحيح و p صحيحة (أو p كمعطى في تمرين) فإن q صحيحة (نستنتج q).
الاستدلال باستعمال هذا النوع يسمى الاستدلال بالاستنتاج.

B. مثال:

مثال 1:

$$1- \text{بين أن: } \forall a, b > 0, \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

$$2- \text{استنتج أن: } \forall x > 0, 2\sqrt{x} \leq 1+x$$

$$3- \text{بين أن: } \forall x, y > 0, 4\sqrt{xy} \leq (1+x)(1+y)$$

مثال 2:

$$1- \text{أحسب: } (x-1)(x+3)$$

$$2- \text{حل المعادلة: } x \in \mathbb{R} / x^2 + 2x - 3 = 0. \text{ استنتج حلول المعادلة: حل المعادلة: } x \in \mathbb{R} / x^2 + 2|x| - 3 = 0$$

04. الاستلزام المضاد للعكس: contraposé:

A. خاصية:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$$

B. ملحوظة:

بدل من أن نبرهن على صحة الاستلزام $p \Rightarrow q$ نبرهن على صحة الاستلزام $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ وبالتالي الاستلزام $p \Rightarrow q$ المطلوب اثباته يصبح صحيح. و هذا النوع من الاستدلال (أو البرهان) المستعمل يسمى الاستدلال المضاد للعكس.



C. مثال:

بين أن: $\forall x, y \in]2, +\infty[, x \neq y \Rightarrow x^2 - 4x \neq y^2 - 4y$

جواب:

نستدل على ذلك باستعمال الاستدلال المضاد للعكس؛ أي نبرهن على: $\forall x, y \in]2, +\infty[, x^2 - 4x = y^2 - 4y \Rightarrow x = y$

ليكن x و y من $]2, +\infty[$ حيث $x^2 - 4x = y^2 - 4y$

$$x^2 - 4x = y^2 - 4y \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = y^2 - 4y + 4$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 = (y-2)^2$$

$$\Rightarrow x-2 = y-2 \text{ أو } x-2 = -(y-2)$$

$$\Rightarrow x = y \text{ أو } x + y - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x = y$$

$x + y - 4 = 0$ غير ممكن لأن: $x > 2$ و $y > 2$ أي $x + y > 4$ أي $x + y - 4 > 0$.

ومنه: $x^2 - 4x = y^2 - 4y \Rightarrow x = y$ صحيح. وبالتالي الاستلزام

المضاد للعكس له: $x \neq y \Rightarrow x^2 - 4x \neq y^2 - 4y$ يصبح صحيح.

خلاصة: $\forall x, y \in]2, +\infty[, x \neq y \Rightarrow x^2 - 4x \neq y^2 - 4y$

05. الاستدلال بفصل الحالات: PAR DISJUNCTION DES CAS

A. خاصية:

p و q و r ثلاث عبارات.

العبرة $[p \Rightarrow q \text{ و } r \Rightarrow q] \Leftrightarrow [(p \text{ أو } r) \Rightarrow q]$ هي قانون منطقي.

B. مصطلح:

للاستدلال على $(p \text{ أو } r) \Rightarrow q$ انه استلزام صحيح يمكن أن نستدل على أن الاستلزامين $r \Rightarrow q$ ثم $p \Rightarrow q$ صحيحين هذا النوع من

الاستدلال يسمى الاستدلال بفصل الحالات. RAISONNEMENT PAR DISJUNCTION DES CAS.

C. مثال: حل المعادلة: $x \in \mathbb{R} : |x+1| + 2x = 0$

المعادلة تكتب على الشكل التالي: $|x+1| + 2x = 0 : x \in]-\infty, -1] \cup [-1, +\infty[$

حالة 1: $x \in]-\infty, -1]$

$$|x+1| + 2x = 0 \Leftrightarrow -(x+1) + 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \notin]-\infty, -1]$$

ومنه: $S_1 = \emptyset$

حالة 2: $x \in [-1, +\infty[$

$$S_2 = \left\{ -\frac{1}{3} \right\} \text{ ومنه: } |x+1| + 2x = 0 \Leftrightarrow (x+1) + 2x = 0 \Leftrightarrow 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \in [-1, +\infty[$$

خلاصة: مجموعة حلول المعادلة: $S = S_1 \cup S_2 = \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$



06. الاستدلال بالخلف: PAR ABSURDE

A. خاصية:

العبارة $q \Rightarrow [(p \text{ و } \bar{p}) \Rightarrow \bar{q}]$ هي قانون منطقي .

الاستدلال باستعمال هذا النوع من الاستدلال يسمى الاستدلال بالخلف.

B. ملاحظة:

لكي نستدل على صحة عبارة q :

1. p هي إحدى المعطيات. (p هي عبارة صحيحة)

2. نفترض أن: q خاطئة (أي $\bar{q}$ صحيحة)

3. هذا الافتراض يؤدي للحصول على $\bar{p}$ عبارة صحيحة وبالتالي نحصل على p و $\bar{p}$ عبارتين صحيحتين وهذا غير ممكن.

4. نقول ما افترضناه (q خاطئة) كان غير صحيح. ومنه q صحيحة.

C. مثال:

نضع: r عدد جذري و i عدد اللاجذري. و $s = r + i$.

بين أن: s مجموع عدد جذري وعدد اللاجذري هو عدد اللاجذري .

جواب:

نفترض أن s عدد جذري.

لدينا: $s = r + i$ ومنه $s - r = i$ وبالتالي $s - r$ عدد جذري (لأن فرق عددين جذريين هو عدد جذري) ومنه: i عدد جذري.

ومنه: i عدد اللاجذري و i عدد جذري. وهذا غير ممكن.

إذن ما افترضناه i عدد جذري كان خاطئا والصحيح هو i عدد اللاجذري.

07. الاستدلال بالترجع: par récurrence

A. خاصية:

n_0 عدد صحيح طبيعي معلوم.

$P(n)$ دالة عبارية لمتغير صحيح طبيعي n مع $n \geq n_0$.

إذا كان :

1) $P(n)$ صحيحة من أجل $n = n_0$.

2) الاستلزام $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ صحيح لكل $n \geq n_0$ (مع n من $\mathbb{N}$) .

فإن: $P(n)$ صحيحة لكل n من $\mathbb{N}$ حيث $n \geq n_0$.

أو أيضا: العبارة " $\forall n \geq n_0 (n \in \mathbb{N}), P(n)$ " صحيحة.

B. ملحوظة:

عند استعمال البرهان بالترجع نتبع المراحل التالية:

1. المرحلة 1:

نتحقق بأن: $P(n)$ صحيحة للرتبة الأولى $n = n_0$ (أي $P(n)$ صحيحة)

2. المرحلة 2:

نفترض بأن: $P(n)$ صحيحة إلى الرتبة n .

و هذا الافتراض يسمى معطيات التراجع .

3. المرحلة 3:

نبين أن: العلاقة $P(n)$ صحيحة للرتبة $n+1$.



C. مثال: بين بالترجع : لكل n من $\mathbb{N}$ ؛ 3 تقسم $n^3 - n$

نتحقق أن : العلاقة صحيحة لـ $n = 0$. لدينا 3 تقسم $0^3 - 0 = 0$
نفترض أن العلاقة صحيحة إلى n أي 3 تقسم $n^3 - n$ هي صحيحة.
نبين أن العلاقة صحيحة لـ $n + 1$ أي 3 تقسم $(n + 1)^3 - (n + 1)$
المطلوب منك أن تبين ذلك.

D. الرمز $\sum$ و $\prod$.

a. الرمز $\sum$.

نرمز للمجموع التالي : $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ بـ $\sum_{i=1}^{i=n} a_i$ ويمكن استعمال j أو k بدل من i .

مثال 1 : $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = \sum_{i=1}^{i=n} 2i$ (المجموع مكون من n حدد)

مثال 2 : $1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = \sum_{i=0}^{i=n} (2i + 1)$ (المجموع مكون من $n + 1$ حدد)

خاصيات :

$$1. \sum_{j=0}^{j=n} (a_j + b_j) = \sum_{j=0}^{j=n} a_j + \sum_{j=0}^{j=n} b_j = \sum_{k=0}^{k=n} a_k + \sum_{k=0}^{k=n} b_k$$

$$2. \sum_{j=1}^{j=n} (a_j + c) = \sum_{j=1}^{j=n} a_j + nc \quad (\text{لأن المجموع مكون من } n \text{ حدد مع } c \text{ عدد ثابتة})$$

b. الرمز $\prod$.

نرمز للجداء التالي : $a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_n$ بـ $\prod_{j=1}^{j=n} a_j$ ويمكن استعمال i أو k بدل من j .

مثال 1 : $2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n = \prod_{k=1}^{k=n} 2k$ (الجداء مكون من n عامل)

مثال 2 : $1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n + 1) = \prod_{i=1}^{i=n} (2i + 1)$ (الجداء مكون من $n + 1$ عامل)

خاصيات :

$$3. \prod_{j=0}^{j=n} (a_j + b_j) = \prod_{j=0}^{j=n} a_j \times \prod_{j=0}^{j=n} b_j = \prod_{k=0}^{k=n} a_k \times \prod_{k=0}^{k=n} b_k$$

$$4. \prod_{j=1}^{j=n} (ca_j) = c^n \prod_{j=1}^{j=n} a_j \quad (\text{لأن الجداء مكون من } n \text{ عامل لـ } c \text{ مع } c \text{ عدد ثابتة})$$

C. تمارين :

بين أن :

$$1. \forall n \in \mathbb{N}^* : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2. \forall n \in \mathbb{N}^* : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{i=1}^{i=n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$3. \forall n \in \mathbb{N}^* : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \sum_{i=1}^{i=n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$